UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dept. Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas I
CI 25275

Tarea 3

1. Si ℓ y b son constantes positivas, demuestre que una fórmula cerrada para la recurrencia $T_n = \ell T_{n-1} + b^{nk}$ para $n > c_0$ y con valor inicial T_{c_0} es

$$T_n = \begin{cases} \ell^{n-c_0} T_{c_0} + \ell^n (n - c_0) & si \quad b^k = \ell \\ \ell^{n-c_0} T_{c_0} + b^k \frac{b^{kc_0}\ell^{n-c_0} - b^{kn}}{\ell - b^k} & si \quad b^k \neq \ell \end{cases}$$

   Sugerencia: divida la recurrencia entre ℓ^n y realice el cambio de variable $Y_n := \frac{T_n}{\ell^n}$, resuelva y luego devuelva el cambio (Seguramente para este problema le sera de utilidad la fórmula $\sum_{i=0}^{n} x^i = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$).

2. Use la fórmula cerrada del ejercicio anterior para demostrar que:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{(b^n)^k log_b(b^n)} = 1$ si $b^k = \ell$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{(b^n)^{log_b(\ell)}} = \ell^{-c_0} T_{c_0} + \dfrac{b^k(\frac{b^k}{\ell})}{\ell - b^k}$ si $b^k < \ell$

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{(b^n)^k} = \dfrac{b^k}{b^k - \ell}$ si $b^k > \ell$